

Waarover gaat de Speciale Relativiteitstheorie?

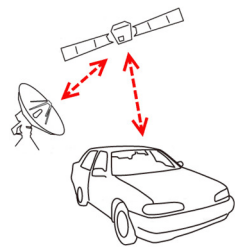
Beweging is relatief. Dat wil zeggen dat je de snelheid van een voorwerp altijd meet ten opzichte van iets anders. Als je in een auto zit die 50 km/h rijdt, dan bedoel je: 50 km/h ten opzichte van de grond. Je spreekt af dat de grond stil staat. Maar ten opzichte van een tegenligger die ook 50 km/h rijdt, lijkt je snelheid veel groter: 100 km/h.

Bovendien weet je dat de grond helemaal niet stil staat. De aarde draait immers in 24 uur om haar eigen as en in ruim 365 dagen om de zon. Die snelheden meet je weer ten opzichte van de zon. Maar ook die staat niet stil... enzovoorts. Elke snelheid die je meet is relatief, dat is: gemeten ten opzichte van iets anders.

Eind 19e, begin 20e eeuw bleek iets bijzonders: alleen de lichtsnelheid (c) is niet relatief. Ten opzichte waarvan je die ook meet, altijd vind je dezelfde waarde: $c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (in vacuüm). Je noemt de lichtsnelheid *invariant*. Daarnaast werd duidelijk dat de lichtsnelheid de grootste snelheid in de natuur is. Grotere snelheden zijn niet mogelijk.

Deze bijzondere eigenschappen van de lichtsnelheid hebben grote gevolgen voor meting van tijdsduren, afstanden en massa's. Onder gewone omstandigheden merk je daar niets van. Maar bij snelheden groter dan (ongeveer) $0,5 \cdot c$ wel: tijd gaat dan langzamer, afstanden worden dan korter en massa neemt dan toe.

Daarover gaat de *Speciale Relativiteitstheorie* van Albert Einstein: over de bijzondere eigenschappen van de lichtsnelheid en de gevolgen daarvan voor tijdsduur, afstand, massa en energie. Die leiden tot een geheel nieuwe kijk op ruimte en tijd en tot een nieuwe, *relativistische* mechanica. Onder gewone omstandigheden verschilt de relativistische mechanica niet meetbaar van de klassieke mechanica van Newton, maar bij zeer grote snelheden wel. Daarom moeten onderzoekers in laboratoria soms rekening houden met relativistische effecten. En een navigatiesysteem zoals GPS zou zonder relativistische mechanica niet mogelijk zijn.



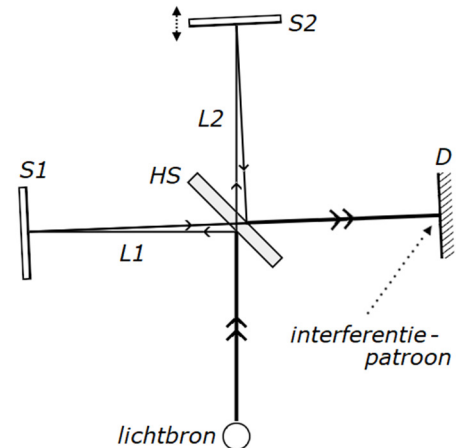
De ether

In 1865 voorspelde Maxwell het bestaan van elektromagnetische golven, met een golfsnelheid van $3,0 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Licht, dat dezelfde snelheid heeft, bleek ook een elektromagnetische golf. Daarom wordt die snelheid de 'lichtsnelheid' genoemd. Wetenschappers dachten toen dat deze snelheid, zoals elke snelheid, was vastgesteld ten opzichte van iets anders, een bepaald *medium*. Dat was nog niet ontdekt maar werd alvast de 'ether' genoemd.

In 1887 wilden Michelson en Morley met een beroemd geworden experiment het bestaan van de ether aantonen door de snelheid van de aarde door de ether te meten. Zie de schematische figuur hiernaast. Met een halfdoorlatende spiegel HS worden vanuit één lichtbron twee onderling loodrechte, coherente lichtbundels L1 en L2 gemaakt. De bundels komen via de spiegels S1, S2 en opnieuw HS samen in een detector D, waar ze interfereren.

Het interferentiepatroon zou afhankelijk moeten zijn van de oriëntatie van de opstelling. Immers, is bijvoorbeeld de baan van L1 precies gericht langs de bewegingsrichting van de aarde en de baan van L2 dus loodrecht daarop, dan geeft dat voor L1 en L2 een verschil in reistijd naar D. Bij draaiing van de opstelling zou dat verschil veranderen, en dus ook het interferentiepatroon. Echter, draaiing had geen enkel effect!

Conclusie: licht trekt zich niets aan van de snelheid van de aarde door de ether. Je meet steeds hetzelfde interferentiepatroon dus ook steeds dezelfde lichtsnelheid. Dat maakt de hypothese van de ether overbodig.



De lichtsnelheid is invariant – De postulaten van Einstein

In 1905 publiceerde Albert Einstein de Speciale Relativiteitstheorie, die aansloot bij zowel de elektrodynamica van Maxwell als het onverwachte resultaat van Michelson en Morley. Hij baseerde de theorie op twee postulaten (uitgangspunten).

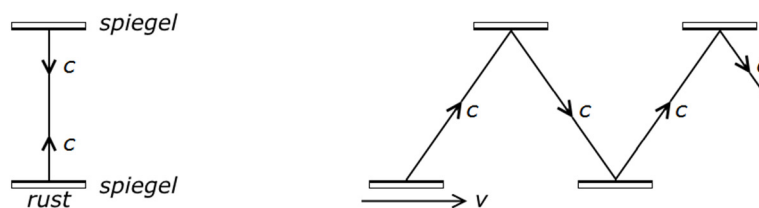
Voor waarnemers die ten opzichte van elkaar stil staan of *met constante snelheid* bewegen geldt:

1. De natuur maakt geen onderscheid. De waarnemers nemen precies dezelfde natuurwetten waar.
2. De lichtsnelheid is invariant (absoluut). Voor al deze waarnemers heeft hij dezelfde waarde, onafhankelijk van de snelheid van waarnemer of bron.

Snelheid, dus ook de lichtsnelheid, is afstand (Δx) per tijdsduur (Δt). Dat c invariant is heeft dus gevolgen voor Δx en Δt , voor ruimte en tijd. Die gevolgen blijken in strijd met de klassieke opvatting van Newton dat ruimte en tijd absoluut zijn. Bij 'kleine' snelheden ($< 0,5 \cdot c$) stemmen Newton en Einstein overeen, bij grotere snelheden niet meer. Zie ook bijlage 1.

Tijdrek

Een gedachte-experiment. Stel je een zogeheten lichtklok voor: twee evenwijdige, horizontale spiegels waartussen een foton op en neer kaatst. Een waarnemer die ten opzichte van de lichtklok in rust is, vindt dat het foton precies verticaal op en neer gaat, met de lichtsnelheid. Elke oversteek vat hij/zij op als één tik van de klok.



In de rechter figuur beweegt de lichtklok ten opzichte van de waarnemer met constante snelheid v naar rechts. Volgens de waarnemer maakt het foton nu een zigzagbeweging: eerst schuin naar boven, dan schuin naar beneden, enz. Hij/zij vindt dus dat het foton nu per tik een langere weg aflegt. Is de lichtsnelheid invariant, dan duurt één tik van de bewegende klok volgens de waarnemer dus langer dan één tik van de stilstaande klok.

Conclusie: volgens de stilstaande waarnemer loopt de bewegende klok langzamer. Je noemt dat tijdrek of tijddilatatie.

Met $\Delta t'$ de tijdsduur die op de bewegende klok is verstreken (de eigentijd) en Δt die op de klok van de waarnemer, geldt:

$$\Delta t = \Delta t' \cdot \gamma \quad \text{met} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{en} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad v = \text{de snelheid van de klok, } c = \text{de lichtsnelheid}$$

Iemand die met de klok mee reist, meet de eigentijd. Voor hem/haar beweegt de klok immers niet. Alleen een achterblijver, een stilstaande waarnemer dus, vindt dat de bewegende klok te langzaam loopt. Ruimtereizigers vinden dus dat de klok in hun ruimteschip goed loopt. Maar achterblijvende familieleden constateren bij terugkomst van het ruimteschip dat de klok aan boord langzamer heeft gelopen. En dat alle processen in het ruimteschip langzamer zijn gegaan: groei, veroudering, radioactief verval, enzovoorts. Zie bijlage 3.

Lengtekrimp

Een stilstaande waarnemer vindt niet alleen dat bewegende klokken langzamer lopen, ook vindt hij/zij dat bewegende afmetingen in de bewegingsrichting zijn gekrompen. Je noemt dat lengtekrimp, lengtecontractie of lorentzcontractie.

Bijvoorbeeld: stel dat in de verre toekomst een astronaut naar een exoplaneet rond de ster *Proxima Centauri* reist. Dat is de dichtstbijzijnde ster na de zon, op circa 4,20 lichtjaar afstand van de aarde. De snelheid van het ruimteschip is constant, $v = 0,60 \cdot c$ (dus $\gamma = 1,25$). Tijdens de reis vindt de astronaut dat hij/zij stilstaat en juist de omgeving beweegt. Volgens de waarnemer-astronaut is de afstand tot Proxima Centauri dus korter dan 4,20 lichtjaar.

Met $\Delta x'$ de bewegende afstand van 4,20 lichtjaar, dus de afstand volgens een astronoom op aarde (de eigenlengte), en Δx de afstand volgens de waarnemer-astronaut, geldt:

$$\Delta x = \Delta x' / \gamma$$

De waarnemer-astronaut beweert dus dat de afstand van de aarde tot Proxima Centauri $4,20 / 1,25 = 3,36$ lichtjaar is.

Er is alleen lengtekrimp in de bewegingsrichting. Zie bijlage 4.

Het eerste postulaat – over en weer

Uit het eerste postulaat volgt dat tijdrek en lengtekrimp over en weer gelden. Elke stilstaande waarnemer vindt dat bewegende klokken langzamer lopen (dus dat bewegende processen langzamer gaan en langer duren) en dat bewegende afmetingen in de bewegingsrichting korter zijn.

Tijdrek en lengtekrimp

Bekijk weer het ruimteschip uit het laatste voorbeeld.

Gemeten op een aardse klok komt het ruimteschip na $4,20 / 0,60 = 7,0$ jaar bij de exoplaneet aan. Een aardse astronoom rekent uit dat de klok in het ruimteschip door tijdrek dan slechts 5,6 jaar aanwijst:

$$\Delta t = \Delta t' \cdot \gamma \rightarrow \Delta t' = \Delta t / \gamma = 7,0 / 1,25 = 5,6 \text{ jaar.}$$

Bij aankomst ziet de astronaut inderdaad dat zijn klok 5,6 jaar aanwijst. Omdat die klok ten opzichte van hem stil stond, vindt hij dat die de juiste tijd aanwijst. Hij verklaart de aanwijzing daarom anders: niet met tijdrek, maar met lengtekrimp. Voor hem stond zijn klok immers stil en bewoog juist de omgeving. Zie boven:

$$\Delta x = 3,36 \text{ lichtjaar} \rightarrow \text{reistijd} = 3,36 / 0,60 = 5,6 \text{ jaar.}$$

Over de klok in het ruimteschip zijn de aardse astronomen en de astronaut het dus eens: op die klok duurt de reis 5,6 jaar. Ook over de snelheid van het ruimteschip en dus over de lichtsnelheid zijn ze het eens.

Gelijktijdigheid

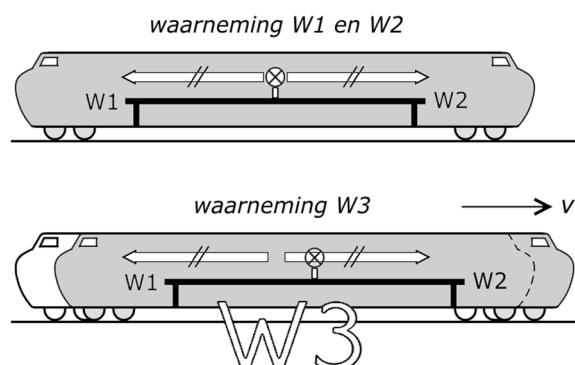
Dat de waarde van de lichtsnelheid invariant is, heeft gevolgen voor het begrip gelijktijdigheid. Een gedachte-experiment maakt dat duidelijk.

Stel, een trein rijdt met een grote, constante snelheid. In de trein, in de lengterichting, staat een lange tafel. Precies midden op de tafel staat een lampje. Aan het linker uiteinde van de tafel zit waarnemer W1, aan het rechter uiteinde zit W2. Een derde waarnemer, W3, staat stil op het perron. Juist als het lampje W3 passeert geeft het een lichtflits.

W1 en W2 merken de flits tegelijkertijd op. Ze zitten immers precies even ver van het lampje en ze bewegen met de trein mee. Voor W3 is het anders. Die beweegt niet met de trein mee. Dus in de tijdsduur die de lichtflits nodig heeft om de uiteinden van de tafel te bereiken, heeft de trein zich ten opzichte van W3 iets naar rechts verplaatst. W3 vindt nu dat de flits naar het rechter uiteinde (dus naar W2) een langere weg moet afleggen dan naar het linker uiteinde (naar W1). Omdat de waarde van de lichtsnelheid invariant is, moet W3 concluderen dat W2 de lichtflits later ziet dan W1.

Dus: wat voor W1 en W2 gelijktijdig is, is het voor W3 niet.

Gelijktijdigheid is niet absoluut.



Ruimtetime

De Speciale Relativiteitstheorie heeft ons wereldbeeld, onze kijk op ruimte en tijd, ingrijpend veranderd.

- Ruimte en tijd zijn niet meer de absolute, objectieve achtergrond waartegen processen zich afspelen. Hoe je ruimte en tijd waarneemt hangt af van je snelheid. Zie bijlage 2.
- Ruimte en tijd zijn niet meer objectief te scheiden. De vier dimensies x , y , z en t zijn aan elkaar gekoppeld en vormen samen een vierdimensionale ruimte: de ruimtetime.

Toch heeft tijd een bijzondere positie. Die blijkt uit het volgende.

Natuurwetten hebben voor x , y en z geen voorkeursrichting. De val van een bal bijvoorbeeld, loodrecht omlaag, beschrijf je met de wet van behoud van energie: $E_z \rightarrow E_k + Q$ (zwaarte-energie wordt omgezet in kinetische energie plus warmte). De beweging is ook in omgekeerde richting mogelijk. Je kunt dezelfde bal immers ook loodrecht omhoog gooien. Voor de beweging in omgekeerde richting gebruik je dezelfde wet (maar dan omgekeerd): $E_k \rightarrow E_z + Q$.

Bij tijd is dat anders. Tijd heeft maar één richting: een oorzaak komt altijd vóór het gevolg. Die volgorde is onomkeerbaar. De *tweede hoofdwet van de thermodynamica* zegt namelijk dat spontane processen altijd zó verlopen, dat de wanorde toeneemt. Dat geeft aan de tijd een richting.

Bijvoorbeeld: een glas water valt om en je hebt dat op video. Als je de video terugdraait zie je het omgekeerde proces: de plas water verzamelt zich en springt vanzelf in het glas, keurig geordend. Dat zoiets spontaan gebeurt is buitengewoon onwaarschijnlijk, want de wanorde neemt af. De tweede hoofdwet zou dan worden gebroken.

Massa

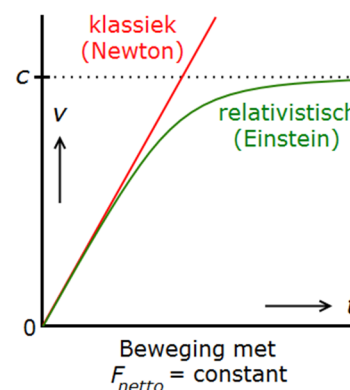
Nog een gedachte-experiment: Als op een voorwerp, bijvoorbeeld een deeltje in een deeltjesversneller, een constante nettokracht blijft werken, dan zou het volgens de klassieke theorie blijven versnellen: zie de lineaire grafieklijn hiernaast. Maar het is niet mogelijk deeltjes te versnellen tot een snelheid gelijk aan of groter dan c . Daarom nadert de werkelijke, relativistische grafieklijn asymptotisch de lijn $v=c$. Het deeltje bereikt dus nooit de lichtsnelheid.

Verder laat de relativistische grafieklijn zien: Hoe groter v , hoe kleiner de steilheid van de lijn, dus hoe kleiner de versnelling van het deeltje. Bij constante nettokracht betekent dat blijkbaar dat het deeltje zich bij hoge snelheden steeds sterker tegen de kracht verzet. Een deeltje dat ten opzichte van de waarnemer snel beweegt, gedraagt zich dus alsof het een grotere massa m' heeft.

$$m' = \gamma \cdot m$$

In de uitdrukking $\gamma \cdot m$ is m de rustmassa van het deeltje: de massa die een waarnemer meet die ten opzichte van het deeltje stil staat. De uitdrukking $\gamma \cdot m$ noem je de relativistische massa. Hoe sneller het deeltje gaat, hoe groter γ , dus hoe groter zijn relativistische massa. Voor 'gewone' snelheden is m' (vrijwel) gelijk aan m .

(Let op: massa is hier: verzet tegen snelheidsverandering, ook wel *trage* massa. Dus niet: hoeveelheid materie).



Impuls

Omdat de relativistische massa (m') afhangt van de snelheid (v), voldoet bij hoge snelheden de klassieke formule voor de impuls ($p = m \cdot v$) niet meer. De relativistische impuls bereken je met:

$$p = \gamma \cdot m \cdot v$$

Energie

Einstein liet zien dat de totale energie van een deeltje met rustmassa m en snelheid v gelijk is aan:

$$E_{\text{totaal}} = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \cdot m \cdot c^2$$

Hieruit volgt dat deeltjes met rustmassa de lichtsnelheid niet kunnen bereiken. Immers, als $v = c$ wordt γ oneindig, dus E_{totaal} ook. Je zou dus oneindig veel energie nodig hebben om zo'n deeltje de lichtsnelheid te geven.

Verder volgt voor een deeltje in rust, dus met $v = 0$ dus $\gamma = 1$:

$$E_{\text{rust}} = m \cdot c^2$$

Dit is een van de beroemdste formules uit de wetenschap, met als opzienbarende boodschap: energie en massa zijn equivalent. Je kunt ze in elkaar omrekenen. Zie bijlage 5.

De energie bij $v = 0$ heet rustenergie. Zie het als 'gestolde' energie. Rustenergie kan, zoals elke andere energiesoort, worden omgezet in andere vormen van energie. Dat gebeurt bijvoorbeeld in sterren (zoals de zon) en in kerncentrales. Andersom wordt bij paarvorming stralingsenergie omgezet in rustenergie van een elektron-positronpaar.

Een bewegend deeltje heeft dus rustenergie en kinetische energie. Uit de twee voorgaande formules volgt nu voor de kinetische energie:

$$E_k = (\gamma - 1) \cdot m \cdot c^2$$

Relativistische mechanica

De invariantie van de lichtsnelheid levert een compleet nieuwe mechanica op, met voor bekende grootheden zoals Δt , Δx en m nieuwe formules in plaats van de klassieke. Je noemt die mechanica *relativistische mechanica*.

De tabel vergelijkt de relativistische mechanica van Einstein met de klassieke mechanica van Newton. Als $v \ll c$ dan is $\gamma \approx 1$ en gaat de relativistische mechanica over in de klassieke.

Klassiek ($v \ll c$)	Relativistisch ($v > 0,5 \cdot c$)
$\Delta t = \Delta t'$	$\Delta t = \Delta t' \cdot \gamma$
$\Delta x = \Delta x'$	$\Delta x = \Delta x' / \gamma$
$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$	$E_{\text{tot}} = \gamma \cdot m \cdot c^2 \rightarrow$ $E_{\text{rust}} = m \cdot c^2$ $E_k = (\gamma - 1) \cdot m \cdot c^2$
$p = m \cdot v$	$p = \gamma \cdot m \cdot v$ $= \gamma \cdot \beta \cdot m \cdot c = \beta \cdot E_{\text{tot}} / c$
m	$\gamma \cdot m$
$F_{\text{netto}} = m \cdot a$	$F_{\text{netto}} = \gamma^3 \cdot m \cdot a$
$v_{\text{tot}} = v_1 + v_2$	$v_{\text{tot}} = \frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 \cdot v_2) / c^2}$

Relativistische factoren
$\beta = \frac{v}{c}$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

$$E = mc^2$$

Snelheden relativistisch optellen

Stel, een ruimteschip reist ten opzichte van de aarde met een constante snelheid van $0,80 \cdot c$ door de ruimte. Vanuit het ruimteschip wordt een kleine verkenningsraket gelanceerd. Ten opzichte van het ruimteschip krijgt de verkenners een constante snelheid van $0,40 \cdot c$, in dezelfde richting.

Klassiek gesproken zou de verkenners dan een snelheid van $1,20 \cdot c$ ten opzichte van de aarde krijgen, een waarde groter dan de lichtsnelheid dus. Relativistisch gezien ligt dat anders (zie de laatste regel van de tabel):

$$v_{\text{verkenners tov aarde}} = \frac{0,80 \cdot c + 0,40 \cdot c}{1 + (0,80 \cdot c \cdot 0,40 \cdot c) / c^2} = \frac{1,20 \cdot c}{1 + 0,32} = 0,91 \cdot c$$

1 Inertiaalstelsels – De postulaten van Einstein

Een (x,y,z)-coördinatenstelsel en een klok zijn samen een plaats-tijd-referentiesysteem. Dat heb je nodig om bewegingen te kunnen beschrijven. Inertiaalstelsels zijn referentiesystemen die ten opzichte van elkaar stilstaan of eenparig, rechtlijnig bewegen. In zulke stelsels geldt de eerste wet van Newton: voorwerpen versnellen alleen als er een nettokracht op werkt. Bijvoorbeeld: zolang een auto met 100 km/h over een rechte snelweg rijdt, is hij een inertiaalstelsel. Als hij snel afremt niet meer, want de inzittenden schieten naar voren, zonder nettokracht.

De postulaten van Einstein kun je nu ook zo formuleren:

1. Inertiaalstelsels zijn gelijkwaardig. Je kunt niet zeggen welk stelsel beweegt en welk stelsel stil staat. Dus in elk inertiaalstelsel zijn de natuurwetten hetzelfde.
2. De lichtsnelheid is invariant: in elk inertiaalstelsel is hij even groot.

Toch noem je je eigen stelsel (het stelsel van de waarnemer) vaak het stilstaande stelsel. Grootheden in het vreemde, bewegende stelsel geef je dan een accent ('), grootheden in je eigen, stilstaande stelsel niet. (Zie bijv. bijlage 2, 3 en 4).

2 Transformaties

Resultaten van metingen, gedaan in het ene inertiaalstelsel, kun je met een zogeheten transformatie omrekenen naar een ander inertiaalstelsel. Voor klassieke mechanica is dat de Galileï-transformatie, voor relativistische mechanica de Lorentz-transformatie.

Stel je twee (x,y,z)-inertiaalstelsels voor. Jij bevindt je in stelsel S. In stelsel S meet een klok de tijd t, in het andere stelsel, S', meet een andere, identieke klok de tijd t'. Stelsel S' beweegt eenparig met snelheid v in de richting van de positieve x-assen. Op t = 0 geldt ook dat t' = 0 en valt S samen met S'. Dan geldt op een later tijdstip t:

- Klassiek, de Galileï-transformatie: $x' = x - v \cdot t$ $y' = y$ $z' = z$ $t' = t$
- Relativistisch, de Lorentz-transformatie: $x' = \gamma \cdot (x - \beta \cdot c \cdot t)$ $y' = y$ $z' = z$ $c \cdot t' = \gamma \cdot (c \cdot t - \beta \cdot x)$

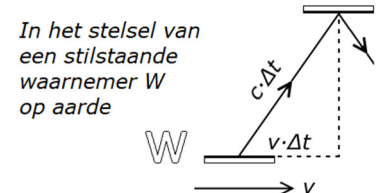
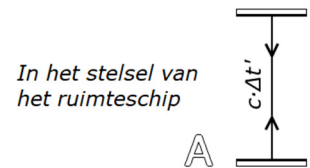
3 Afleiding van de formule voor tijdrek

Hiernaast zie je nogmaals een lichtklok: twee evenwijdige spiegels waartussen een foton op en neer kaatst. De lichtklok bevindt zich aan boord van een ruimteschip dat de aarde passeert met een constante, horizontale snelheid v.

In het ruimteschip staat de lichtklok stil en kaatst het foton volgens astronaut A in tijdsduur Δt' verticaal van onder naar boven. Volgens een stilstaande waarnemer W op aarde heeft het foton ook een horizontale snelheid v en gaat het dus schuin naar boven. Het foton legt volgens W dus een langere weg af. Omdat c invariant is duurt c·Δt langer dan c·Δt'. Pas Pythagoras toe:

$$c^2 \cdot \Delta t'^2 + v^2 \cdot \Delta t'^2 = c^2 \cdot \Delta t^2 \rightarrow \frac{c^2 \cdot \Delta t'^2}{\Delta t'^2} + v^2 = c^2 \rightarrow$$

$$\frac{\Delta t'^2}{\Delta t^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \rightarrow \Delta t = \Delta t' \cdot \gamma$$



4 Afleiding van de formule voor lengtekrimp

Stel, een elektron vliegt met een constante snelheid v op een detector D af, langs een waarnemer W die ten opzichte van D in rust is. Beschouw een tijdsduur van 1,0 ns, gemeten in het stelsel van het elektron.

- Volgens W loopt de klok van het elektron te langzaam. W berekent de afstand Δx_W die het elektron aflegt zo:

$$\Delta x_W = v \cdot \Delta t = v \cdot \Delta t' \cdot \gamma = v \cdot 1,0 \cdot 10^{-9} \cdot \gamma$$

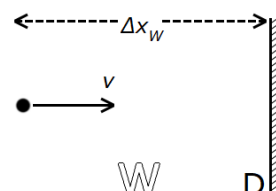
- In zijn eigen stelsel staat het elektron (e) stil en komt de detector D met een snelheid v op het elektron af. In 1,0 ns legt D een afstand Δx_E af waarvoor geldt:

$$\Delta x_E = v \cdot \Delta t = v \cdot 1,0 \cdot 10^{-9}$$

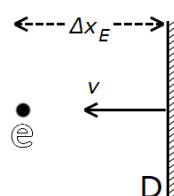
- Hieruit volgt:

$$\frac{\Delta x_E}{\Delta x_W} = \frac{v \cdot 1,0 \cdot 10^{-9}}{v \cdot 1,0 \cdot 10^{-9} \cdot \gamma} \rightarrow \Delta x_E = \frac{\Delta x_W}{\gamma}$$

Ofwel, vanuit het stelsel van het elektron: $\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}$



In het stelsel van W en D:
 $\Delta x_W = v \cdot 1,0 \cdot 10^{-9} \cdot \gamma$



In het stelsel van het elektron:
 $\Delta x_E = v \cdot 1,0 \cdot 10^{-9}$

5 Afleiding van de formule voor rustenergie

Met een gedachte-experiment (van Einstein, gepubliceerd in 1906) kun je de formule voor de rustenergie, $E = m \cdot c^2$, afleiden.

Zie de figuur. De linkerwand van een doos met massa M en lengte L zendt een foton uit. Dat wordt een tijdje later door de rechterwand geabsorbeerd. Op doos en foton werken geen externe krachten, dus er is impulsbehoud.

Het foton had bij vertrek een impuls $p_{\text{foton}} = h/\lambda = E/c$. Er is impulsbehoud, dus de doos krijgt bij het vertrek een impuls ('terugslag') $p_{\text{doos}} = -E/c$. Voor deze impuls kun je ook schrijven: $p_{\text{doos}} = M \cdot v$. Nu volgt:

$$M \cdot v = -E/c \rightarrow v = -E/(M \cdot c)$$

Op het moment dat de rechterwand het foton absorbeert, komt de doos weer tot stilstand. De doos is intussen naar links verplaatst over een afstand

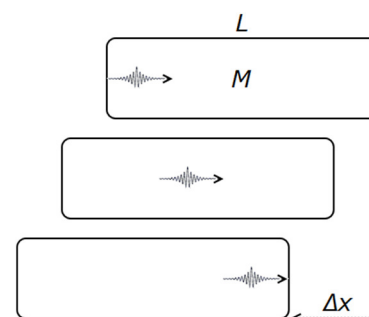
$$\Delta x = v \cdot \Delta t = v \cdot L/c = -E \cdot L/(M \cdot c^2)$$

Omdat er geen externe krachten op de doos en het foton werken, moet het gemeenschappelijke zwaartepunt op zijn plaats blijven. Dat kan alleen als er met het foton niet alleen energie maar ook massa naar rechts is verplaatst. Als je deze massa m noemt, en het gemeenschappelijke zwaartepunt blijft op zijn plaats, dan moet gelden:

$$m \cdot L = -M \cdot \Delta x \rightarrow m \cdot L = -M \cdot [-E \cdot L/(M \cdot c^2)] \rightarrow E = m \cdot c^2$$

(Opmerkingen:

- L moet eigenlijk $L - \Delta x$ zijn, maar L dus ook $L - \Delta x$ valt weg.
- Als de linkerwand van de doos een foton uitzendt, neemt M een heel klein beetje af. Maar ook M valt weg).



6 Drie opgaven

1. Muonen

Voortdurend komen er hoog-energetische deeltjes vanuit de ruimte de atmosfeer binnen. De atmosfeer beschermt ons tegen die zogeheten *kosmische straling*: doordat de stralingsdeeltjes botsen met deeltjes uit de atmosfeer bereikt het grootste deel het aardoppervlak niet.

Als op tientallen kilometers hoogte een hoog-energetisch deeltje botst met een deeltje van de atmosfeer ontstaat er een aantal kleinere deeltjes, waaronder vaak zogeheten muonen. Muonen hebben bijna de lichtsnelheid en zijn instabiel. De gemiddelde levensduur van een muon is in zijn eigen stelsel $2,2 \mu\text{s}$.

Stel, op 10 km hoogte ontstaat een muon. Het komt met constante snelheid $v = 0,998 \cdot c$ verticaal op het aardoppervlak af. Neem aan dat het na $2,2 \mu\text{s}$ vervalst.

- a. Toon met een klassieke berekening aan dat het muon het aardoppervlak lang niet bereikt.

Klassiek bezien lijkt het dus niet waarschijnlijk dat er op het aardoppervlak ooit muonen zullen worden waargenomen. De werkelijkheid is echter anders. Uit metingen blijkt dat muonen wel degelijk het aardoppervlak bereiken. Die metingen worden opgevat als een bevestiging van de Speciale Relativiteitstheorie.

- b. Ga met behulp van een relativistische berekening na dat dit muon het aardoppervlak kan bereiken.

2. Snelheid

Laat met behulp van de relativistische formule voor het optellen van snelheden zien:

- a. Als $v_1 \ll c$ en $v_2 \ll c$ dan is de relativistische formule (bijna) gelijk aan de klassieke ($v_{\text{tot}} = v_1 + v_2$).
- b. Als $v_1 = c$ dan geldt, onafhankelijk van v_2 : $v_{\text{tot}} = c$.

3. Toon met $E_{\text{tot}} = \gamma \cdot m \cdot c^2$ aan dat alleen deeltjes met $m = 0$ de lichtsnelheid kunnen hebben.

7 Meer weten?

Zie bijvoorbeeld:

- Albert Einstein (1997). *Einstein: mijn theorie. Over de speciale en algemene relativiteitstheorie*. (4e druk). Utrecht: Het Spectrum. ISBN 90-274-5758-1
Eerder uitgegeven als Aula-pocket (1978) en Aula-paperback (1986, 1987) onder de titel *Relativiteit*. Voor het eerst verschenen in 1916 als *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*.
- Sander Bais (2007). *De sublieme eenvoud van relativiteit*. Amsterdam University Press. ISBN 978 90 5356992 4
Een boekje met een begrijpelijke, visuele inleiding op de Speciale Relativiteitstheorie, aan de hand van zogeheten Minkowski-diagrammen. Je vindt daar ook een afleiding van de Lorentz-transformatie en van de formule voor het relativistisch optellen van snelheden.
- Marcel Vonk (2015). *Dossier: Relativiteit*. <https://www.quantumuniverse.nl/dossier-relativiteit>
- Jan Stuivenberg. *De tweelingparadox*. <https://www.stuif.com/inhoud.html>